



TITLE:

# Milnor の定理の1つの拡張(変換群論と代数的位相幾何学)

AUTHOR(S):

牛瀧, 文宏

---

CITATION:

牛瀧, 文宏. Milnor の定理の1つの拡張(変換群論と代数的位相幾何学). 数理解析研究所講究録 1992, 793: 169-186

ISSUE DATE:

1992-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82714>

RIGHT:

## Milnor の定理の $L$ への拡張

京都産大理 牛龍文宏 (Fumihito Ushitaki)

### §1. 序論

この小論を通じて特に断らない限り,  $G$  は球面に自由に作用する有限群とし, 考えるカテゴリーは  $\mathbb{C}^\infty$  カテゴリーとする. この小論の目的は次の Milnor の定理を拡張することにある.

定理 1.1 ((Mi; Corollary (2.13)).  $L$  と  $L'$  の間の任意の  $n$  同値  $W$  は,  $\dim L \geq 5$  のとき  $L \times I$  に微分同相である. ここで  $I$  は閉区間  $[0, 1]$  を表す.

この定理を変換群論の言葉に直してその形で拡張することを考える. その為に次の記号を用意する.  $V$  を複素次元  $n$  のユニタリー  $G$  表現とし,  $S(V)$  を  $V$  の単位球面とする.  $G$  の  $V$  への作用が自由であるとき,  $S(V)$  を free-linear- $G$  球面ということにする. 以上の言葉を用いて定理 1.1 を書き直すと

次の様になる。

定理 1.2.  $G$  を有限巡回群,  $S(V)$  と  $S(V')$  を次元が  $2n-1 \geq 5$  の free-linear- $G$  球面とする。  $W$  を  $S(V)$  と  $S(V')$  の間の  $G$ - $h$  同境とすると、  $W$  は  $S(V) \times I$  に  $G$  微分同相である。

Milnor の定理を定理 1.2 の形で拡張することを考える。即ち  $G$  が一般の有限群の場合この定理の拡張を紹介するのがこの小論の目的である。その例として次に述べるものがある。証明は後述の注意 4.2 より明らかである。

例 1.3.  $G$  を複 2 面体群, 複 4 面体群, 複 8 面体群, 又は 4 元数群とする。  $S(V)$  と  $S(V')$  を  $2n-1 \geq 5$  次元の free-linear  $G$  球面とする。このとき  $S(V)$  と  $S(V')$  の間の任意の  $G$ - $h$  同境  $W$  は  $S(V) \times I$  に  $G$  微分同相である。

この小論の主定理は定理 2.1 である。また 4 つの節で構成されている。第 2 節では主定理とそれによつめる種々の準備として系を述べる。第 3 節で主定理の証明を行う。第 4 節では特に  $G$  を有限可解群に限って考え、具体的な例を与えることを行う。

## §2. Milnor の定理の拡張 (一般論)

先ず Rothenberg の完全系列について復習する。詳細については [Sh] を参照されたい。  $G$  を有限群,  $\mathbb{Z}[G]$  を  $G$  の  $\mathbb{Z}$  上の群環とする。  $\mathbb{Z}[G]$  は  $\overline{\sum a_g g} = \sum a_g g^{-1}$  ( $a_g \in \mathbb{Z}$ ,  $g \in G$ ) で定義された involution を持つ。  $GL(\mathbb{Z}[G])$  の元  $(X_{ij})$  に対しては、これより誘導された involution  $\overline{(X_{ij})} = (X_{ji})$  が定義される。従って  $G$  の Whitehead 群  $Wh(G)$  はこれより誘導される involution をもつ。 ( $Wh(G)$  や  $SK_1(\mathbb{Z}[G])$  については [O] 参照。) これを  $Wh(G)$  上の bar operation と呼ぶことにし,  $\bar{\phantom{x}}$  で表す。  $Wh(G)$  の部分集合  $\tilde{A}_m(G)$  を

$$\tilde{A}_m(G) = \{\tau \in Wh(G) \mid \bar{\tau} = (-1)^m \tau\}$$

で定義する。容易にわかるように,  $\tilde{A}_m(G)$  は  $Wh(G)$  の部分群である。次の剰余群を  $A_m(G)$  で表す。

$$A_m(G) = \tilde{A}_m(G) / \{\tau + (-1)^m \bar{\tau} \mid \tau \in Wh(G)\}.$$

このとき Rothenberg の完全系列は

$$\cdots \rightarrow A_{2n+1}(G) \xrightarrow{c} L_{2n}^s(G) \xrightarrow{d} L_{2n}^h(G) \rightarrow \cdots$$

で与えられた。ここに  $L_{2n}^s(G)$ ,  $L_{2n}^h(G)$  は Wall 群を表す (Wall 群については [B] を参照されたい)。ここで  $c$  を定める写像  $\tilde{c}: A_{2n+1}(G) \rightarrow L_{2n}^s(G)$  を考える。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2.1.  $G$  を有限群,  $X$  を  $2n-1$  次元 free-linear- $G$  ホモトピー球面 で  $n \geq 3$  とする。このとき次の (1) と (2) は同値である。

- (1)  $X$  とそれ自身の間の任意の  $G$ - $h$  同境  $W$  は  $X \times I$  に  $G$  微分同相である。
- (2)  $\ker \tilde{\epsilon} = 0$ 。

この定理の系として定理 1.2 の 1 つの拡張である次の結果が得られる。

系 2.2.  $S(V)$  と  $S(V')$  を  $2n-1$  次元 free-linear- $G$  ホモトピー球面 で  $n \geq 3$  であるとする。このとき  $\ker \tilde{\epsilon} = 0$  であれば,  $S(V)$  と  $S(V')$  の間の任意の  $G$ - $h$  同境  $W$  は  $S(V) \times I$  に  $G$  微分同相である。

注意 2.3. 定理 2.1 は  $X$  とそれ自身の間の  $G$ - $h$  同境を考えただけに対し, 系 2.2 では異なる  $G$  表現の球面の間の  $G$ - $h$  同境を考えている。しかし一方, 定理 2.1 では作用は線型とは限っていないが, 系 2.2 では線型作用を考えている。

注意 2.4. 有限群  $\mathbb{Z}_m$  は §4 で述べるように  $\ker \tilde{\epsilon} = 0$  の条

件を満たし、他にも例1.3のような群が例として挙げられるので、系2.2は真にMilnorの定理の拡張になっている。

系2.2の証明  $C$  を  $G$  の巡回部分群とする。定理1.2により  $C$  表現空間として  $\text{res}_C V = \text{res}_C V'$  が成り立つ。従って、 $G$  表現空間として  $V = V'$  となる。よって  $S(V)$  と  $S(V')$  は  $G$  微分同相である。即ち  $W$  は  $S(V)$  と自分自身の間の  $G$ - $h$  同相とみなせ、 $\ker \bar{c} = 0$  の仮定から定理2.1を用いて  $W$  が  $S(V) \times I$  と  $G$  微分同相であることを示す。

### §3. 主定理の証明

Milnorの定理の拡張(系2.2)の証明に必要な部分は定理2.1における(2)  $\rightarrow$  (1)であるから、ここではその証明を述べることとする。(1)  $\rightarrow$  (2)については[L1]を参照したい。

定理2.1の(2)  $\rightarrow$  (1)の証明  $|G| \leq 2$  の場合は  $Wh(G) = 0$  となるので  $S$  同相定理により(1)は成り立つ。よって  $|G| \geq 3$  の場合に証明する。 $W$  と  $X$  とそれ自身の間の  $G$ - $h$  同相で  $\dim W \geq 6$  とする。 $X$  の  $W$  への包含写像を区別するために  $X'$  を  $X$  のコピーとして  $W = X \amalg X'$  とおく。そして各包含写像を  $i: X \rightarrow W$ ,  $i': X' \rightarrow W$  とする。(2)の仮定のもと、 $\tau := \tau(W, X)$  が0となる

ことを示す。はじめに  $\tau$  が  $\tilde{A}_{2n+1}(G)$  の元であることを示す。

補助定理 3.1.  $G$ -同値  $(W; X, X')$  に対し  $\tau(W, X) = \tau(W, X')$  が成り立つ。

証明  $r$  を  $\tau$  の  $G$ -ホモトピー逆写像とする。一般に、 $G$  が位数 3 以上の有限群で 5 次元以上のホモトピー球面  $X$  に自由に作用するとき、 $X$  の任意の  $G$ -ホモトピー自己同値写像は恒等写像に  $G$ -ホモトピックである ([UL; Lemma 4.1])。従って

$$\tau(r \circ \tau') = \tau(\text{id}) = 0$$

が成り立つ。一方

$$\begin{aligned} \tau(r \circ \tau') &= \tau(r) + r_* \tau(\tau') \\ &= -r_* \tau(\tau) + r_* \tau(\tau') \\ &= r_* (\tau(\tau') - \tau(\tau)) \end{aligned}$$

となるので  $\tau(\tau') = \tau(\tau)$  を得て、この補助定理は示された。  $\square$

双対性定理 ([M; p. 394]) により、 $\tau(W, X') = -\overline{\tau(W, X)}$  とも得る。従って補助定理 3.1 の結果と合せて  $\tau$  が  $\tilde{A}_{2n+1}(G)$  の元であることがわかる。

補助定理 3.2.  $G$ -ホモトピー同値写像  $f: W \rightarrow X \times I$  が存在して  $\tau(f) = -f_*(\tau)$ ,  $f(x) \in X \times \{0\}$ ,  $f(x') \in X \times \{1\}$ ,  $f|_X = \text{id}$ ,  $f|_{X'} = \text{id}$  である

満す。

証明  $G$  強変位レトラクト  $r: W \rightarrow X$  を用いることにより,  
 $G$  ホモトピー同値写像  $f_0: W \rightarrow X \times I$  で  $f_0(X) \subset X \times \{0\}$ ,  $f_0(X) \subset X \times \{1\}$ ,  
 $f_0|_X$  と  $f_0|_{X'}$  は  $G$  ホモトピー同値写像という条件を満たすものが構成できる。従って補助定理 3.1 の証明の中で述べたように  $f_0|_X$  と  $f_0|_{X'}$  は共に恒等写像に  $G$  ホモトピックである。従って  $G$  ホモトピー同値写像  $f: W \rightarrow X \times I$  が存在して  $f(X) \subset X \times \{0\}$ ,  $f(X') \subset X \times \{1\}$ ,  $f|_X = \text{id}$ ,  $f|_{X'} = \text{id}$  を満す。この  $f$  が  $\tau(f) = -f_*\tau(r)$  を満すことを示す。 $p: X \times I \rightarrow X$  を自然な強  $G$  変位レトラクトとする。この時、次の  $G$  ホモトピー同値写像の  $G$  ホモトピー可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & X \times I \\ \downarrow r & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\text{id}} & X \end{array}$$

従って

$$\tau(p \circ f) = \tau(\text{id} \circ r)$$

$$\tau(p) + p_*\tau(f) = \tau(\text{id}) + \text{id}_*\tau(r)$$

$$p_*\tau(f) = \tau(r)$$

$i: X \rightarrow W$  は  $r: W \rightarrow X$  の  $G$  ホモトピー逆写像なので, [C; (22.5)] により  $\tau(r) = -r_*\tau(i)$  が成り立つ。よって,

$$\tau(f) = p_*^{-1}\tau(r)$$



$$\begin{aligned}
&= -f_*^{-1} \circ r_* \tau(i) \\
&= -f_* \tau(W, X) \quad (\because \tau(i) = \tau(W, X)) \\
&= -f_* \tau
\end{aligned}$$

□

$g: X \times I \rightarrow W$  と  $f: W \rightarrow X \times I$  の  $G$ -ホモトピー-逆写像で  $\partial g: \partial(X \times I) \rightarrow \partial W$  は恒等写像であるものとする。この時、 $\partial(X \times I)$  上の  $G$ -ベクトル束  $g^*T(W)|_{\partial(X \times I)}$  は  $T(X \times I)|_{\partial(X \times I)}$  と同一視され  $f^*g^*T(W)$  は  $T(W)$  に同型である。かくして  $G$ -法写像

$$(f; b): (W; T(W)) \longrightarrow (X \times I; f^*g^*T(W))$$

を得る。ここで  $b$  は  $G$ -ベクトルバンドル同型であり、境界への制限は恒等写像である。次にこの  $G$ -法写像  $(f; b)$  の  $G$ -手術障害  $\sigma(f; b) \in L_{2n}^S(G)$  が  $(-1)^{n+1} \zeta(\tau)$  で与えられることを示す。

まず十分大きな  $r$  を一つ与えて固定して  $F$  で階数  $2r$  の自由  $\mathbb{Z}[G]$  加群  $\mathbb{Z}[G]^{2r}$  を表す。  $W$  と  $G \times S^n \times S^n$  の  $r$  個のコピーの同変連結和を考えることにより  $\mathbb{Z}[G]$  加群として  $K_n(W) \cong F$  なる  $G$ -法写像

$$(f'; b'): (W', X \amalg X; T(W')) \longrightarrow (X \times I, X \times \{0, 1\}; f'^*g'^*T(W'))$$

を得る。surgery kernel  $K_n(W')$  の  $\mathbb{Z}[G]$  基底として次の2つのものを考える。その1つは

$$B_0 = \{\{1\} \times \{x_1\} \times S_1^n, \dots, \{1\} \times \{x_r\} \times S_r^n, \{1\} \times S_1^n \times \{x_1\}, \dots, \{1\} \times S_r^n \times \{x_r\}\}$$

で与えられるもので、ここに  $\{1\} \times \{x_i\} \times S_i^n$  と  $\{1\} \times S_i^n \times \{x_i\}$  は

点  $(1, *, *)$  で交わりそれらはホモロジー群  $H_n(S^n \times S^n) (1 \leq n)$  を生成する。もう一つの基底は  $G$  手術障害  $\sigma(f; b)$  の定義から与えられるもので [Wa 1; Theorem 5.8 の証明] の中に与えられている基底に相当するものである。この  $K_n(W)$  の  $\mathbb{Z}[G]$  基底を  $\beta$  と書くことにし,  $f$  の写像錐を  $C_*(f)$  と表せば [Wa 1; Lemma 2.3] にあるように  $\beta(C_*(f)) = 0$  となるようにとられている。

補助定理 3.3.  $[\beta/\beta_0] = (-1)^n \tau(f)$

ここで  $[\beta/\beta_0]$  は  $\beta_0$  を  $\beta$  に変換する行列で代表される  $Wh(G)$  の元を表す。(その定義や性質に関する詳細については [Mi p. 363 以後] を参照にされたい)

証明  $f_*: C_*(W) \rightarrow C_*(X \times I)$  を  $G$ -ホモトピー同値写像  $f: W \rightarrow X \times I$  から誘導されたチェイン複体の間のチェイン写像とする。  $f_*$  の写像錐を  $C_*(f)$  と書く。  $F_*$  を  $F_n = F, F_k = 0 (k \neq n)$  で与えられるチェイン複体とする。

$$\varphi_* = f_* \oplus 0_*: C_*(W) \oplus F_* \rightarrow C_*(X \times I)$$

とおく。このとき  $C_*(\varphi) = C_*(f) \oplus F_{*-1}$  が成り立つ。実際

$$C_k(\varphi) = C_{k-1}(W) \oplus F_{k-1} \oplus C_k(X \times I) = C_k(f) \oplus F_{k-1}$$

であり  $\partial_*, \partial'_*, d_*, d'_*$  をそれぞれ  $C_*(\varphi), C_*(f), C_*(W) \oplus F_*, C_*(X \times I)$  の境界準同型とする時,  $a \in C_{k-1}(W), b \in F_{k-1}, c \in C_k(X \times I)$

に対して

$$\begin{aligned} \partial_k(a+b+c) &= -d_{k-1}(a+b) + \psi_*(a+b) + d'_k(c) \\ &= -d_{k-1}(a) + f_*(a) + d'_k(c) \\ &= \partial'_k(a+c). \end{aligned}$$

$F_*$  の境界準同型は 0 写像であるから, これで  $C_*(g)$  と  $C_*(f) \oplus F_{*-1}$  がチェーン複体として等しいことが示された。

$f_*: C_*(W') \rightarrow C_*(X \times I)$  を  $G$  法写像  $f: W \rightarrow X \times I$  から誘導されたチェーン写像とする。  $W$  から  $W'$  を構成したときの方法を考えるとにより  $\psi_*$  は  $f_*$  とみなせる。そして加群  $F_n = F$  は  $W$  から  $W'$  を得る過程において  $W$  に連結和された  $G \times S^n \times S^n$  の  $r$  個のコピーによって定義されるチェーン複体の  $n$ -サイクルを表す。  $f': W' \rightarrow X \times I$  は  $H_i(C_*(f')) = 0$  ( $i \neq n+1$ ) を満たすことがわかる。

(ここでホモロジー群は簡約ホモロジーを考えている。)[Wa] Lemma 2.3]にあるように  $C_*(f')$  の preferred basis は  $\tau(C_*(f')) = 0$  を満たすようにとられ,  $H_{n+1}(C_*(f'))$  の preferred basis は同値なものを除いて

$$\bigoplus_i C_{n+1+2i}(f') \cong H_{n+1}(C_*(f')) \oplus \bigoplus_i C_{n+2+2i}(f')$$

で与えられる。従ってこの基底はお互いに独立でない。  $\tau(C_*(f'))$  を計算するにあたり, チェーン複体とチェーン写像のカテゴリリーにおける次の短完全系列を考える。

$$0 \rightarrow C_*(f) \rightarrow C_*(\psi) \rightarrow F_{*-1} \rightarrow 0$$

そうする時ホモロジー完全系列

$$\cdots \rightarrow H_q(C_*(f)) \rightarrow H_q(C_*(\varphi)) \rightarrow H_{q-1}(F) \rightarrow \cdots$$

は  $6n+2$  次の自由非輻状チェイン複体であると考えられる。

これを置く  $\tau(\mathcal{H})$  が定義され  $\tau(\mathcal{H})$  の計算はチェイン複体

$$0 \rightarrow H_{n+1}(C_*(f')) \rightarrow H_n(F) \rightarrow 0$$

のトーションの計算に帰着される。上で見たように  $H_{n+1}(C_*(f'))$  の preferred basis は  $\beta$  であり  $H_n(F)$  の preferred basis は  $\beta_0$  である。  $\mathcal{H}_{3n+3} = H_n(F)$  であり  $\mathcal{H}$  が非輻状であることより、

$$\tau(\mathcal{H}) = (-1)^{3n+3} [\beta/\beta_0] = (-1)^{n+1} [\beta/\beta_0]$$

となる。[Mi] Theorem 3.2] により

$$\begin{aligned} \tau(C_*(f')) &= \tau(C_*(\varphi)) \\ &= \tau(C_*(f)) + \tau(F_{*-1}) + \tau(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

$F_n = 0$  ( $n \neq n$ ) であるから  $\tau(F_{*-1}) = 0$  を得る。  $\beta$  は  $\tau(C_*(f')) = 0$  を満たすようにとられているから  $[\beta/\beta_0] = (-1)^n \tau(f)$  を得る。  $\square$

補助定理3.2により  $f$  は  $\tau(f) = -f_*(\tau)$  を満たすので

$$[\beta/\beta_0] = (-1)^{n+1} f_*(\tau)$$

となる。よって

$$(-1)^{n+1} \tilde{\tau}(\tau) = \tilde{\tau}([\beta/\beta_0]) = \sigma(f; b') = \sigma(f; b)$$

となる。ここで中央の等号は  $\tilde{\tau}$  の定義より成り立つ。さらに

$\sigma(fib)$  に関して次が成り立つ。

補助定理 3.4.  $G$  手術障害  $\sigma(fib)$  は自由作用を持つ閉  $G$  多様体の  $G$  手術障害として得られる。

証明 いはじめに一点  $x_0 \in X$  をとり  $X \times I$  の中の  $G \times \{x_0\} \times I$  を考える。  $f|_{\partial W}: \partial W \rightarrow X \sqcup X$  は恒等写像であるから

$$f^{-1}|_X(x_0) = f^{-1}|_{X'}(x_0) = x_0$$

となる。そうすると  $f^{-1}(G \times \{x_0\} \times I)$  は  $G \times \{x_0\} \times I \cup \bigcup_{i=1}^l A_i$  に  $G$  微分同相になる。但し、ここで  $A_i \subset W$  は  $W$  の 1 次元部分多様体を表す。[Mo; Proposition 1.3] により  $G$  写像  $f': W \rightarrow X \times I$  が存在して  $f'$  は  $f$  と  $G$  ホモトピーかつ  $G \times \{x_0\} \times I$  に横断正則で  $f'^{-1}(G \times \{x_0\} \times I) = G \times \{x_0\} \times I$  を満たし、  $f'|_{\partial W}: \partial W \rightarrow X \times \{0, 1\}$  は恒等写像となる。  $f'$  の  $G \times \{x_0\} \times I$  への横断正則性により  $G \times \{x_0\} \times I$  の  $G$  管状近傍  $G \times D_{x_0} \times I$  を十分小さくとすれば  $f': f'^{-1}(G \times D_{x_0} \times I) \rightarrow G \times D_{x_0} \times I$  は各ファイバー上で線型写像と仮定してよい。  $f': f'^{-1}(G \times \{x_0\} \times I) \rightarrow G \times \{x_0\} \times I$  は  $\text{rel } G \times \{x_0\} \times \{0, 1\}$  で  $G$  微分同相に  $G$  ホモトピーであるから同変ホモトピー被覆性質により  $f'|_{f'^{-1}(G \times D_{x_0} \times I)}$  は  $G$  微分同相とみなせる。  $f': \partial W \rightarrow X \times \{0, 1\}$  は恒等写像であることに注意する。  $W_0 = \text{Closure}(W - f'^{-1}(G \times D_{x_0} \times I))$ ,  $(X \times I)_0 = \text{Closure}(X \times I - (G \times D_{x_0} \times I))$  とおく。更に、  $f'$  のホモトピー逆写像  $g': X \times I \rightarrow W$  で

$g''|_{\partial(X \times I) \cup (G \times D_{x_0} \times I)} : \partial(X \times I) \cup (G \times D_{x_0} \times I) \rightarrow (X \cup X') \cup f'^{-1}(G \times D_{x_0} \times I)$   
 が真に  $f''|_{(X \cup X') \cup f'^{-1}(G \times D_{x_0} \times I)}$  の逆写像であり  $g''((X \times I)_0) \subset W_0$  を満  
 たすものが存在する。こうして  $G$  法写像

$$(f''; b'') : (W, X \sqcup X'; T(W)) \rightarrow (X \times I, X \times \{0, 1\}; f'^* g'^* T(W))$$

で  $(W_0; T(W_0))$  への制限

$(f''|_{W_0}; b''|_{T(W_0)}) : (W_0, \partial W_0; T(W_0)) \rightarrow ((X \times I)_0, \partial(X \times I)_0; f'^*|_{W_0} g'^*|_{(X \times I)_0} T(W_0))$   
 も  $G$  法写像であるものが得られる。 $\Sigma = W_0 \cup_{f''|_{\partial W_0}} (X \times I)_0$  を考える。  
 即ちこれは  $W_0 \sqcup (X \times I)_0$  と  $x \in \partial W_0$  と  $f''(x) \in \partial(X \times I)_0$  を同一視して得  
 られる空間である。 $f''|_{\partial W_0}$  は  $G$  微分同相であるから  $\Sigma$  は  $C^\infty G$  多  
 様体の構造をもつ。同様に  $\Sigma' = (X \times I)_0 \cup_{id|_{\partial(X \times I)_0}} (X \times I)_0$  を構成し写像  
 度 1 の  $G$  写像  $F: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  と

$$F(x) = f''(x) \quad \text{if } x \in W_0$$

$$F(x) = id(x) \quad \text{if } x \in (X \times I)_0$$

で定義する。こうして  $G$  法写像

$$(F; B) : (\Sigma; T(\Sigma)) \rightarrow (\Sigma'; F^* T(\Sigma'))$$

を構成する。ここに  $B$  は

$$B|_{T(W_0)} = b''|_{T(W_0)}$$

$$B|_{T((X \times I)_0)} = id$$

で定義される  $G$  ベクトルバンドル同型である。そうすると

$(F; B)$  の  $G$  手術障害  $\sigma(F; B)$  に対し、

$$\sigma(F; B) = \sigma(f''|_{W_0}; b''|_{T(W_0)}) = \sigma(f''; b'') = \sigma(f; b)$$

となり補助定理が示された。 □

$P$  を  $G$  の 2-Sylow 部分群とする。  $G$  は periodic cohomology を持つので  $G$  の 2-Sylow 部分群は巡回群か又は一般四元数群である。従って [O; p. 14, Example 2] により  $SK_1(\mathbb{Z}[P]) = 0$  が成り立つ。依って  $\text{res}_P \tau \in SK_1(\mathbb{Z}[P]) = 0$  が成り立つので  $\text{res}_P f$  は  $P$  単純ホモトピー同値である。これより  $\text{res}_P \sigma(fib) = 0$  である。補助定理 3.4 により Wall のトランスファー定理 ([Wa 2; Theorem 12]) が適用できて  $\sigma(fib) = 0$  を得る。上で見たように  $(-1)^{n+1} \tilde{c}(\tau) = \sigma(fib)$  であるから  $\tilde{c}(\tau) = 0$  を得、  $\tilde{c}$  が単射である仮定より  $\tau = 0$  となる。これは  $W$  が  $X \times I$  に  $G$  微分同相であるということに他ならない。以上で定理 2.1 の (2)  $\rightarrow$  (1) の証明が終わる。

#### §4. 有限群の場合への拡張 (具体例)

前節までに述べた一般論に基づき、特に  $G$  を有限可解群に限って考えた場合に定理 1.2 の拡張例となる群と考察するのがこの節の目的である。球面に自由かつ線型に作用する有限可解群については [Wo] に完全な展開が載せられている。Sandow ([So]) により  $G$  が periodic cohomology を持つ有限群の場合、 $\tilde{A}_{2n+1}(G)$  と  $SK_1(\mathbb{Z}[G])$  とが同型であることが示されている。従って  $\ker \tilde{c} = 0$  となるための例として  $SK_1(\mathbb{Z}[G]) = 0$  となる群

$G$  を考えることにする。今  $G$  を有限可解群に限って考える時次の結果が得られる。証明は[U2]参照。

定理 4.1 ([U2])  $G$  を球面に自由かつ線型に作用する有限可解群とする。この時  $G$  が次の  $\Gamma_1(m, n, r)$ ,  $\Gamma_2(m, n, \ell)$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4(n)$  のいずれかの形で表される時、またその時に限り  $SK_1(\mathbb{Z}[G]) = 0$  が成り立つ。

$\Gamma_1(m, n, r)$ : 2つの元  $A, B$  で生成され基本関係が

$$A^m = B^n = 1, \quad BAB^{-1} = A^r$$

である位数  $mn$  の群。ここで  $m, n, r$  は次の条件を満たす。

$$m \geq 1, \quad n \geq 1, \quad (n(r-1), m) = 1, \quad r^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

$d$  を  $\text{mod } m$  の乗法群における  $r$  の order とする時、

$n/d$  は  $d$  の任意の素因数で割り切れる。

$\Gamma_2(m, n, \ell)$ : 3つの元  $A, B, R$  で生成され基本関係が

$$A^m = B^n = 1, \quad BAB^{-1} = A^{-1}, \quad R^2 = B^{n/2}, \quad RAR^{-1} = A^\ell, \quad RBR^{-1} = B^{-1}$$

である位数  $2n$  の群。ここで  $m, n, \ell$  は次の条件を満たす。

$$m \geq 1, \quad (2n, m) = 1, \quad \ell^2 \equiv 1 \pmod{m}, \quad n = 2^u v \quad (u \geq 2, (v, 2) = 1, v \geq 1)$$

$\Gamma_3$ : 3つの元  $B, P, Q$  で生成され基本関係が

$$B^3 = 1, \quad P^2 = Q^2 = (PQ)^2, \quad BPB^{-1} = Q, \quad BQB^{-1} = PQ$$

である位数  $24$  の群

$\Gamma_4(n)$ : 4つの元  $B, P, Q, R$  で生成され基本関係が



$$B^n = 1, P^2 = Q^2 = (PQ)^2 = R^2, BPB^{-1} = Q, BQB^{-1} = PQ,$$

$$RPR^{-1} = QP, RQR^{-1} = Q^{-1}, RBR^{-1} = B^{-1}$$

である位数  $16n$  の群。  $n$  は  $6$  で割る  $7$  を余る整数。  $\square$

この定理で考えた群については  $SK_1(\mathbb{Z}[G]) = 0$  であるから、  
これらは定理 2.1, 系 2.2 の条件を満たす群  $G$  の例である。

注意 4.2. 有限巡回群  $\mathbb{Z}_k$  は  $\Gamma(1, k, r)$  によって与えられる。  
複 2 面体群  $D_b^*$  (2 面体群  $D_b$  の 2 重被覆) は  $b$  が奇数の時には  
 $\Gamma(b, 4, -1)$  で得られ、 $b$  が偶数の時には  $\Gamma(1, 2b, 2)$  によって  
与えられる。四元数群  $Q(8)$  は  $\Gamma(1, 4, 2)$  で与えられる。  $\Gamma_1$  は複  
4 面体群  $T^*$  に等しく、  $\Gamma_4(3)$  は複 8 面体群  $O^*$  に等しい。

注意 4.3. 定理 2.1 において  $SK_1(\mathbb{Z}[G]) = 0$  の時  $X$  とそれ自  
身の間の任意の  $G$ -同境  $W$  が  $X \times I$  に  $G$  微分同相であるという  
ことだけなら、実は補助定理 3.1 を示して  $\Gamma \in \tilde{A}_{2n+1}(G)$  が証明  
された時点で既に証明されているのである。

以上 Milnor の定理の拡張について紹介したわけであるが、  
今後の課題としては  $\ker \gamma \neq 0$  となる例の存在を確認すること  
であろう。また、この小論の内容についてのより詳しい情報

は[U1], [U2]を参照されたい。最後にこの小論の清書を引き受けてくれた妻の牛籠由美子氏に感謝する。

### 参考文献

- [B] A. Bak, "K-Theory of Forms," *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, 1981.
- [C] M.M. Cohen, "A Course in Simple-Homotopy Theory," *Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, 1973.
- [Mi] J. Milnor, *Whitehead torsion*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (1966), 358-426.
- [Mo] M. Morimoto, *Bak Groups and Equivariant Surgery II*, *K-theory* 3 (1990), 505-521.
- [O] R. Oliver, "Whitehead Groups of finite groups," *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1988.
- [Sh] J. L. Shaneson, *Wall's surgery obstruction group for  $G \times \mathbb{Z}$* , *Ann. of Math.* 90 (1969), 296-334.
- [So] J. D. Soule, *Triviality of the Involution on  $SK_1$  for Periodic Groups*, *Lecture Notes in Math.* 1126 (1985), 271-276, Springer-Verlag.
- [U1] Is a  $G$ - $h$ -cobordism a  $G$ - $s$ -cobordism?, (Preprint)

- {U2} A generalization of a theorem of Milnor, (in preparation).
- {Wa 1} C.T.C. Wall, "Surgery on Compact Manifolds," Academic Press, 1970.
- {Wa 2} C.T.C. Wall, Formulae for surgery obstructions, *Topology* 15(1976), 189-210.
- {Wo 1} J. A. Wolf, "Spaces of Constant Curvature," Publish or Perish, INC., 1974.